فهرست

امتحان نهایی

135 min

بارم‌بندی درس هندسه ۳

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۱۰	۴
دوم	تا صفحه ۴۶	۱۰	۳
	صفحه ۴۶ به بعد	-	۵
سوم		-	۸
جمع		۲۰	۲۰

۱
بخش

درسنامه
و سؤالات تشریحی

فصل اول

ماتریس و کاربردها ۱

فصل اول هندسهٔ ۳، در امتحان نوبت اول ۱۰ نمره و در نوبت دوم ۴ نمره و در شهریور و دی ۶ نمره دارد.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب‌امتحان هربسته QR-codeهای مقابل را اسکن‌کنید

بسته‌های ۱ و ۲ | بستهٔ ۳ | بسته‌های ۴ و ۵ | بستهٔ ۶

بستهٔ اول

آشنایی با ماتریس

صفحهٔ ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

ماتریس

تعریف هرآرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند C ،B ،A و... نامگذاری می‌کنند.

مثال به ماتریس زیر توجه کنید. این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&\pi\\ \sqrt{3}&4&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\boxed{1\quad 2\quad \pi}\\ \boxed{\sqrt{3}\quad 4\quad -1}\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{سطر اول}\\ \text{سطر دوم}\end{array}\quad,\quad A=\begin{array}{ccc}\text{ستون اول}&\text{ستون دوم}&\text{ستون سوم}\\ \left[\boxed{\begin{matrix}1\\ \sqrt{3}\end{matrix}}\right.&\boxed{\begin{matrix}2\\ 4\end{matrix}}&\left.\boxed{\begin{matrix}\pi\\ -1\end{matrix}}\right]\end{array}$$

حواست هست که سطرها رو از بالا به پایین و ستون‌ها رو از چپ به راست شماره‌گذاری می کنیم.

مرتبهٔ ماتریس

اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و به صورت A ماتریسی از مرتبهٔ m در n (یا از مرتبهٔ $m \times n$) است، می‌خوانیم. *(یادت باشه که برای بیان مرتبهٔ ماتریس، عدد سمت چپه تعداد سطرهاست و عدد سمت راستیه تعداد ستون‌ها).* مثلاً در مثال بالا ماتریس A یک ماتریس از مرتبهٔ ۲ در ۳ است.

باورت میشه که از تعاریف هم سؤال میاد تو نوایی. تمرین پایینو نگاه کن.

سؤال **جای خالی را با عبارت مناسب پُرکنید.** دی ۱۴۰۰

هرآرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، .... نامیده می‌شود.

پاسخ ماتریس

درایهٔ ماتریس

تعریف هرعدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

مثال در ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\ 3&4\end{bmatrix}$ به ۱، ۲، ۳ و ۴ درایه‌های ماتریس می‌گوییم.

درایه‌های هر ماتریس را با حرف کوچک اسم ماتریس نشان می‌دهیم و به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ شمارهٔ سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند. *(اندیس همون عددهای کوچولویی هستن که زیر حروف قرار می‌دیم).* a_{ij} یعنی درایهٔ سطر i ام و ستون j ام ماتریس A.

مثال $A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$

تعداد درایه‌های ماتریس

یک ماتریس از مرتبهٔ m در n دارای $m\times n$ درایه است. مثلاً یک ماتریس ۳ در ۴ دارای $3\times 4=12$ درایه است.

ماتریس با درایهٔ عمومی

گاهی اوقات درایه‌های ماتریس A را می‌توان با ضابطه یا ضابطه‌هایی مشخص کرد که به آن درایهٔ عمومی ماتریس A می‌گویند. در این صورت ماتریس A را به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

مثال در ماتریس $A_{2\times 3}=[a_{ij}]$ اگر $a_{ij}=i+j$ باشد، برای به دست آوردن درایه‌های آن کافی است به جای درایهٔ سطر i ام و ستون j اُم مجموع شمارهٔ سطر و ستون آن درایه را قرار دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

توجه اگر تمام درایه‌های یک ماتریس از یک قانون تبعیت کنند می‌توان قانون درایه را در کروشه نیز قرار داد مثلاً در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم $A=[i+j]_{2\times 3}$.

سؤال **جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.** دی ۹۸

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{4\times 3}$ که در آن $a_{ij}=\dfrac{2i}{j-1}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر .... است.

پاسخ درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس A یعنی a_{32} پس باید در ضابطهٔ a_{ij} به جای i عدد ۳ و به جای j عدد ۲ را قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$a_{32}=\frac{2(3)}{2-1}=\frac{6}{1}=6$$

توجه گاهی ضابطهٔ درایه‌ها با هم فرق می‌کنند. در این صورت باید حواسمان باشد که برای هر درایه ضابطهٔ مربوط به آن را انتخاب کنیم.

سؤال **در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases}2i-j & i>j\\ 2 & i=j\\ j-i & i<j\end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟**

پاسخ درایه‌های ستون دوم a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند. در a_{12} ، $i<j$ ، در a_{22} ، $i=j$ و در a_{32} ، $i>j$ است. پس:

$$A=\begin{bmatrix} \bigcirc & a_{12} & \bigcirc \\ \bigcirc & a_{22} & \bigcirc \\ \bigcirc & a_{32} & \bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} i<j\Rightarrow a_{ij}=j-i\Rightarrow a_{12}=2-1=1\\ i=j\Rightarrow a_{ij}=2\Rightarrow a_{22}=2\\ i>j\Rightarrow a_{ij}=2i-j\Rightarrow a_{32}=2(3)-2=6-2=4\end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $1+2+4=7$ است.

بسته ۱ پرسش‌های تشریحی — آشنایی با ماتریس

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را .... آن ماتریس می‌نامیم.

۲. ماتریس A که دارای ۵ سطر و ۳ ستون است دارای .... درایه است.

۳. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ که در آن $a_{ij}=i^2j-3$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون چهارم برابر .... است.

۴. در ماتریس $B=[\dfrac{i+j}{2j}]_{3\times 4}$ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم برابر .... است.

۵. در ماتریس $C=[c_{ij}]_{3\times 4}$ که در آن $c_{ij}=\begin{cases}i+j & i\geq j\\ j^2-1 & i<j\end{cases}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم برابر .... است.

● درستی یا نادرستی عبارات در سه سؤال زیر را مشخص کنید.

۶ . ماتریسی که دارای سه سطر و پنج ستون باشد از مرتبهٔ ۳×۵ است.

۷ . ماتریسی که ۱۲ درایه دارد می‌تواند ۵ سطر داشته باشد.

۸ . در ماتریس $A = [i^{۲} + j^{۲}]_{۲\times۲}$ مجموع درایه‌ها برابر ۲۰ است.

۹ . در ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$, $a_{ij} = \begin{cases} i - \dfrac{j}{۲} & i < j \\ i^{۲} - j^{i} & i \geq j \end{cases}$ می‌باشد. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به‌دست آورید.

۱۰ . اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i - j & i < j \\ ۲ & i = j \\ i + j & i > j \end{cases}$ باشد، درایه‌های $a_{۳۲}$ ، $a_{۳۱}$ و $a_{۱۲}$ را به‌دست آورید. (دی ۹۹)

۱۱ . ماتریس $A = [a_{ij}]_{۴\times۴}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} ۲ & i > j \\ -۳ & i = j \\ i^{j} & i < j \end{cases}$ می‌باشد، مفروض است. ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

بسته دوم

معرفی چند ماتریس خاص

صفحه ۱۲ تا ۱۷ کتاب درسی

الف معرفی چند ماتریس خاص

در این قسمت به معرفی چند ماتریس خاص و پرکاربرد می‌پردازیم:

۱ ماتریس مربعی: اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌نامیم.

مثال ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند زیرا تعداد سطرها و ستون‌های آن‌ها برابر است.

$$A = [۵]_{۱\times۱} \qquad B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad C = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

توجه در مورد ماتریس مربعی به موارد زیر توجه کنید:

۱ به ماتریس مربعی $n \times n$ ، به‌طور خلاصه ماتریس مرتبهٔ n نیز می‌گویند. مثلاً وقتی در سؤالی می‌گویند ماتریس A از مرتبهٔ ۴ است یعنی A یک ماتریس مربعی است که دارای ۴ سطر و ۴ ستون می‌باشد.

۲ ماتریس مربعی مرتبهٔ ۱ یعنی $[k]_{۱\times۱}$ را مساوی عدد حقیقی k نیز تعریف می‌کنند. یعنی به‌جای این‌که بنویسند $A = [۵]$ ، آن را به‌صورت $A = ۵$ هم نمایش می‌دهند.

■ قطرهای اصلی و فرعی ماتریس مربعی

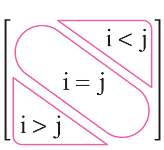
در ماتریس مربعی A قطر اصلی و قطر فرعی را ببینید. درایه‌های روی قطر اصلی دارای شمارهٔ سطر و ستون برابر هستند اما اگر a_{ij} درایهٔ روی قطر فرعی باشد، $i + j = n + ۱$ می‌باشد. *(حواست باشه n همون مرتبهٔ ماتریسه)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

توجه در ماتریس‌های مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی $i < j$ و در درایه‌های پایین قطر اصلی $i > j$ می‌باشد.

(در درایه‌های روی قطر اصلی هم که $i = j$ بود.)



سؤال در ماتریس $A = [2i - j]_{3\times 3}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی را به‌دست آورید.

پاسخ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی A، درایه‌های a_{11}، a_{22} و a_{33} هستند پس:

$$\begin{cases} a_{11} = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_{22} = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2 \\ a_{33} = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 3 = 6$$

۲ ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. مرتبهٔ ماتریس‌های سطری به‌صورت $1 \times n$ است.

مثال ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}_{1\times 1} = 5$$

حواست باشه در ماتریس سطری مهم اینه که فقط یک سطر داشته باشیم و تعداد ستون‌ها مهم نیست، حتی می‌تونه یک ستون هم داشته باشه!

سؤال ماتریس سطری $A = [a_{ij}]$ دارای ۵ درایه است. اگر $a_{ij} = i + j$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ ماتریس سطری دارای یک سطر است. چون ماتریس A دارای ۵ درایه است پس مرتبهٔ آن 1×5 می‌باشد. حال داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 & 1+5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

۳ ماتریس ستونی: اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می‌نامیم. مرتبهٔ ماتریس‌های ستونی $m \times 1$ است.

مثال ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}_{1\times 1} = 12$$

ماتریس ستونی هم مثل ماتریس سطریه. فقط باید یک ستون داشته باشه. تعداد سطرها هم مهم نیست.

۴ ماتریس قطری: ماتریسی مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. دقت کنید درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

مثال ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سؤال جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱ ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند. **شهریور ۱۴۰۰**

۲ در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار m برابر .... است. **شهریور ۹۹**

پاسخ ۱ قطری

۲ در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

سؤال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ n+2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. مقدار $m + n$ را به‌دست آورید.

پاسخ چون A یک ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن باید صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \\ n + 2 = 0 \Rightarrow n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3 + (-2) = 1$$

۵ ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم.

مثال ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

سؤال درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دی ۹۸

«هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.»

پاسخ درست

۶ ماتریس واحد یا همانی: اگر در ماتریس اسکالر تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باشد، ماتریس را ماتریس واحد یا همانی می‌نامیم. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix} K & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & K \end{bmatrix}_{n\times n}$ را با KI_n نشان می‌دهیم.

۷ ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با $\bar{o}$ نشان می‌دهیم.

$$\bar{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هنگامی مساوی‌اند که اولاً هم‌مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها مساوی باشند. *(درایه‌های نظیر به نظیر، درایه‌هایی هستند که شمارهٔ سطر و ستون آن‌ها در دو ماتریس برابر باشد.)*

سؤال اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید. شهریور ۹۹

پاسخ باید درایه‌های نظیر به نظیر ماتریس‌های A و B برابر باشند:

$$\begin{cases} y+1 = x-1 \xRightarrow{x=10} y+1 = 9 \Rightarrow y = 8 \\ x-2 = 8 \Rightarrow x = 10 \\ 3 = 3 \\ 4 = z+1 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 10+8+3 = 21$$

ب اعمال روی ماتریس‌ها

جمع و تفریق ماتریس‌ها

دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم. حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که از همان مرتبهٔ A و B می‌باشد.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B = [b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

سؤال دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ شهریور ۱۴۰۰

پاسخ خیر. چون دو ماتریس A و B هم‌مرتبه نیستند. ماتریس A از مرتبهٔ 3×2 و ماتریس B از مرتبهٔ 2×3 است.

سؤال دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & m-۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ n+۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ m & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & n-۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A+B$ را محاسبه کنید.

پاسخ چون A ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفرند:

$$\begin{cases} m-۳=۰ \\ n+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow m=۳ \text{ ، } n=-۲$$

بنابراین ماتریس‌های A و B به‌صورت زیر هستند و حاصل $A+B$ برابر است با:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۲ & ۰+(-۱) & ۰+۱ \\ ۰+۳ & ۱+۰ & ۰+۲ \\ ۰+۳ & ۰+(-۱) & ۴+(-۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به بیان دیگر اگر A یک ماتریس $m \times n$ و r یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $۲A-۳B$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$۲A-۳B=۲\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}-۳\times\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۶ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴-(-۳) & ۲-۰ \\ ۶-۶ & ۸-(-۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس

قرینهٔ ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش برابر ماتریس صفر است.

$$A+(-A)=\bar{O}$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$، ماتریس B را به‌گونه‌ای معلوم کنید که $A+B=\bar{O}$ باشد.

پاسخ چون $A+B=\bar{O}$ است، پس B قرینهٔ ماتریس A می‌باشد. بنابراین داریم:

$$B=-A=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۳ \\ -۲ & -۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، داریم:

۱ جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$A+B=B+A$$

۲ جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

۳ ماتریس صفر، عضو خنثی عمل جمع است.

$$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$$

۴ اگر r و s اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$r(A\pm B)=rA\pm rB \text{ , } (r\pm s)A=rA\pm sA$$

۵ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد.

$$A=B\Rightarrow rA=rB$$

۶ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد:

$$rA=rB \text{ , } r\neq ۰\Rightarrow A=B$$

سؤال درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. **خرداد ۱۴۰۰**

«اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$ آن‌گاه داریم $A = B$ »

پاسخ با توجه به ویژگی‌های گفته شده عبارت فوق درست است.

تمامی خواص بالا را می‌توان با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس اثبات کرد. *(اثبات یکی از اینا رو تو سؤال زیر ببین.)*

سؤال **اگر A و B ماتریس‌های هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $r(A\pm B) = rA\pm rB$.**

پاسخ با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس داریم:

$$r(A\pm B) = r([a_{ij}]\pm[b_{ij}]) = r[a_{ij}\pm b_{ij}] = [r(a_{ij}\pm b_{ij})]$$

از آن‌جایی که ضرب نسبت به جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی توزیع‌پذیر است داریم:

$$[r(a_{ij}\pm b_{ij})] = [ra_{ij}\pm rb_{ij}] = [ra_{ij}]\pm[rb_{ij}] = r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}] = rA\pm rB$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و هم‌چنین $r = ۳$ و $s = ۲$ باشند، درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

۱ $(A+C)+B = A+(C+B)$

۲ $(r+s)A = rA+sA$

پاسخ ۱ یک بار $(A+C)+B$ و بار دیگر $A+(C+B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(A+C)+B = \left(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A+(C+B) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+C)+B = A+(C+B)$$

۲ یک بار $(r+s)A$ و بار دیگر $rA+sA$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(r+s)A = (۳+۲)A = ۵A = ۵\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۱۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$rA+sA = ۳A+۲A = ۳\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+۲\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۱۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (r+s)A = rA+sA$$

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی

معرفی چند ماتریس خاص

● **جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید.**

۱۲. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر .... است.

۱۳. اگر ماتریسی دارای یک سطر باشد، به آن ماتریس .... می‌گوییم.

۱۴. در ماتریس اسکالر درایه‌های واقع بر قطر اصلی .... هستند.

۱۵. دو ماتریس .... را می‌توان با هم جمع کرد.

۱۶. جمع دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی ....

۱۷. در ماتریس اسکالر $A = \begin{bmatrix} n+۲ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار $m+n$ برابر .... است.

۱۸. در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی .... هستند.

۱۹. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های $A+۲B$ برابر .... است.

● **درستی یا نادرستی عبارات سؤالات ۲۰ تا ۲۸ را مشخص کنید.**

۲۰. ماتریس صفر یک ماتریس مربعی است.

۲۱. در ماتریس مربعی A درایه‌های واقع بر قطر فرعی دارای شمارهٔ سطر و ستون برابر هستند.

۲۲. درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس قطری، غیرصفر هستند.

۲۳ . هر ماتریس اسکالر مربعی است.

۲۴ . هر ماتریس قطری اسکالر است.

۲۵ . جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

۲۶ . طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه تقسیم کرد.

۲۷ . ماتریس اسکالر عضو خنثی عمل جمع است.

۲۸ . عمل جمع ماتریس‌های خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

۲۹ . ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$ دارای ۹ درایه است. اگر $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i=j \\ ۲i+j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۳۰ . در ماتریس $A = [i^۲ - mj]_{۳\times۳}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۸ است. مقدار m را به‌دست آورید.

۳۱ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & m-۴ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & n-۳ & ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و $B = \begin{bmatrix} m-k & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $m+n+k$ را به‌دست آورید.

۳۲ . اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳a & c-۱ \\ a+b & -۶ \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $a(b+c)$ را به‌دست آورید.

۳۳ . اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-۲ & c-b \\ d+a & b+۲ \end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به‌دست آورید.

۳۴ . اگر ماتریس $\begin{bmatrix} x+۱ & x^۲-x-۲ \\ x^۲+x & ۲x+۱ \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A را به‌دست آورید.

۳۵ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این‌صورت $x+۲y+۳z$ را به‌دست آورید. (دی ۱۴۰۰، شهریور ۹۸)

۳۶ . اگر ماتریس‌های $A = [۳i - j^۲]$ و $B = \begin{bmatrix} b-۲ & a+۱ \\ c+۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ را به‌دست آورید.

۳۷ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $۲A - ۳B$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۳۸ . ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A + C = \bar{O}$ باشد، ماتریس $۲B + ۳C$ را به‌دست آورید.

۳۹ . اگر $A = [a_{ij}]$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^۲ - j & i \ge j \\ ۲i - j & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $۲A - ۳B + ۲I$ را به‌دست آورید.

۴۰ . اگر A یک ماتریس و r و s اعداد حقیقی باشند ثابت کنید $(r \pm s)A = rA \pm sA$.

بسته سوم

ضرب ماتریس‌ها

صفحه ۱۷ تا ۲۱ کتاب درسی

ضرب ماتریس‌ها

هر دو ماتریس دلخواهی را نمی‌توان در هم ضرب کرد. برای آن‌که $A \times B$ انجام‌پذیر باشد باید تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ یعنی A با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست یعنی B برابر باشد.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

برابر

مرتبهٔ $A \times B$

مثلاً اگر $A_{۲\times۵}$ و $B_{۵\times۳}$ باشد $A \times B$ انجام‌پذیر است و مرتبهٔ آن ۲×۳ می‌باشد. اما $B \times A$ تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های B برابر ۳ و تعداد سطرهای A برابر ۲ است و $۲ \neq ۳$ می‌باشد.

کلاً برای این‌که بشه دو تا ماتریس رو در هم ضرب کرد باید وقتی اونارو کنار هم می‌نویسی دو تا عدد نزدیک برابر باشن تا بشه در هم ضربشون کرد. مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب برابر همون دو تا عدد دورهاست.

$$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

نزدیکا برابر — دورها — دورها

سؤال اگر A ماتریسی ۵ × ۳ باشد، در هر حالت مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر. در صورت تعریف مرتبهٔ ماتریس حاصل را بیابید.

① $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ ② $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$ ③ $B=[b_{ij}]_{۵\times۳}$ ④ $B=[b_{ij}]_{۵\times۴}$

پاسخ

① $A_{۳\times۵}\times B_{۳\times۲}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست.
برابر نیست

$B_{۳\times۲}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست.
برابر نیست

② $A_{۳\times۵}\times B_{۳\times۵}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست
برابر نیست

$B_{۳\times۵}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست
برابر نیست

③ $A_{۳\times۵}\times B_{۵\times۳}=(AB)_{۳\times۳}$
برابر — مرتبه

$B_{۵\times۳}\times A_{۳\times۵}=(BA)_{۵\times۵}$
برابر — مرتبه

④ $A_{۳\times۵}\times B_{۵\times۴}=(AB)_{۳\times۴}$
برابر — مرتبه

$B_{۵\times۴}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست
برابر نیست

به دست آوردن درایه‌های حاصل‌ضرب دو ماتریس

اگر $A\times B$ انجام‌پذیر باشد، *(دو تا نزدیکا برابر باشن)* برای به‌دست آوردن درایهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس $C=A\times B$ یعنی C_{ij} سطر iام ماتریس A را در ستون jام ماتریس B ضرب می‌کنیم. *(یعنی سطر رو از ماتریس سمت چپ و ستون رو از ماتریس سمت راست انتخاب می‌کنیم.)*

$$C_{ij}=[a_{i۱}\ \ a_{i۲}\ \dots\ a_{in}]\begin{bmatrix}b_{۱j}\\ b_{۲j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}=a_{i۱}\times b_{۱j}+a_{i۲}\times b_{۲j}+\dots+a_{in}\times b_{nj}$$

اگر این کار را برای تک‌تک درایه‌ها انجام دهیم، ماتریس حاصل‌ضرب AB به‌دست می‌آید.

سؤال اگر $A=[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB را به‌دست آورید.

پاسخ چون $A_{۱\times۵}$ و $B_{۵\times۱}$ است، پس ماتریس AB از مرتبهٔ ۱ × ۱ می‌باشد و داریم:

$$A\times B=[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]\times\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$

$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ باشند.

۱ ماتریس $A\times B$ را محاسبه کنید. ۲ آیا ضرب $B\times A$ امکان‌پذیر است؟ چرا؟

پاسخ ۱ اگر فرض کنیم $A\times B=C$ است، از آن‌جایی که $\underbrace{A_{3\times 3}\times B_{3\times 2}}$ (برابر، مرتبه)، پس ماتریس C از مرتبهٔ 3×2 بوده و داریم:

کم‌کم باید ذهنی حساب کنید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2-4 & 3+4-5\\ 6-2+4 & 9+4+5\\ -2+2+16 & -3-4+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 8 & 18\\ 16 & 13\end{bmatrix}$$

۲ خیر. زیرا تعداد ستون‌های ماتریس B برابر ۲ و تعداد سطرهای ماتریس A برابر ۳ است و چون با هم برابر نیستند $B\times A$ امکان‌پذیر نیست:

$\underbrace{B_{3\times 2}\times A_{3\times 3}}_{\text{برابر نیست}}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست.

سؤال مقادیر x و y را از معادلهٔ زیر به‌دست آورید. **دی ۹۹**

$$\begin{bmatrix}x & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & y-2\end{bmatrix}$$

پاسخ ابتدا حاصل $\begin{bmatrix}x & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}x & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 4x-2\end{bmatrix}$$

حال ماتریس $\begin{bmatrix}2x & 4x-2\end{bmatrix}$ باید با ماتریس $\begin{bmatrix}4 & y-2\end{bmatrix}$ برابر باشد، پس:

$$\begin{cases}2x=4\Rightarrow x=2\\ 4x-2=y-2\xrightarrow{x=2}6=y-2\Rightarrow y=8\end{cases}$$

حتماً ماتریس‌های خاص یادتون هست. ببین چطوری از اونا تو سؤالا استفاده می‌کنن. سؤال بعدی رو ببین.

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد. **شهریور ۱۴۰۰**

پاسخ ابتدا ماتریس $A\times B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a & -8+2a\\ b-3 & -2b-2\end{bmatrix}$$

برای آن‌که $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، پس

$$\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4\\ b-3=0\Rightarrow b=3\end{cases}$$

سؤال اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i^2-1 & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید. **شهریور ۹۸**

پاسخ ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

حال $A\times B$ را به دست می‌آوریم:

قرارمون این بود که ذهنی حساب کنید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-1+4 & 0+3+0 & 0+2+10\\ 2-3+2 & 1+9+0 & 0+6+5\\ 4-1+16 & 2+3+0 & 0+2+40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 12\\ 1 & 10 & 11\\ 19 & 5 & 42\end{bmatrix}$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}$ باشد.

۱ ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورید.

۲ قسمت (۱) را با این حکم در اعداد حقیقی که «اگر $a\times b=۰$ آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$» مقایسه کنید.

پاسخ **۱** چون $A_{۲\times۳}$ و $B_{۳\times۳}$ است پس $(AB)_{۲\times۳}$ می‌باشد و داریم:

تو ذهنت دیگه!

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-۱+۱+۰ & ۲-۲+۰ & -۲+۲+۰\\ -۲+۱+۱ & ۴-۲-۲ & -۴+۲+۲\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۲ در ماتریس‌ها اگر $A\times B=\overline{O}$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که $A=\overline{O}$ یا $B=\overline{O}$.

به‌دست آوردن سطر یا ستون خاص در ضرب ماتریس‌ها

۱ برای پیداکردن درایه‌های سطر iام ماتریس $C=A\times B$، کافی است سطر iام ماتریس A را در ماتریس B ضرب کنیم.

$$\text{سطر iام ماتریس } C=[\text{سطر iام ماتریس } A]\times B$$

۲ برای پیداکردن ستون jام ماتریس $C=A\times B$، کافی است ماتریس A را در ستون jام B ضرب کنیم.

$$\text{ستون jام ماتریس } C=A\times\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{jام}\\ B\end{bmatrix}$$

سؤال اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۲ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر سوم $A^۳$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا سطر سوم ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ -۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۲ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

حال سطر سوم ماتریس $A^۳$ برابر است با:

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۲ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ ۳ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$$

سؤال فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۹ & ۲ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۵\\ ۴ & ۷ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس سمت چپ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۹ & ۲ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۵\\ ۴ & ۷ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۳\\ ۱۳ & ۹ & ۹\\ ۳ & ۶ & ۵\end{bmatrix}$$

حال برای به‌دست آوردن درایه‌های سطر دوم ماتریس A، کافی است سطر دوم ماتریس $\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۳\\ ۱۳ & ۹ & ۹\\ ۳ & ۶ & ۵\end{bmatrix}$ یعنی $[۱۳\ \ ۹\ \ ۹]$ را در ماتریس $\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ضرب کنیم:

$$\text{سطر دوم } A=[۱۳\ \ ۹\ \ ۹]\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=[-۱۳\ \ ۲۲\ \ ۱۸]$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A برابر $۲۷=۱۸+۲۲+۱۳-$ است.

خواص ضرب ماتریس‌ها

۱ در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B \neq B \times A$$

سؤال جای خالی را با کلمه مناسب پر کنید.

حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

پاسخ ندارد

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، نشان دهید $A \times B$ و $B \times A$ برابر نیستند.

پاسخ ماتریس‌های $A \times B$ و $B \times A$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲+۶ & -۱+۲ \\ ۶+۳ & -۳+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ \\ ۹ & -۲ \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۳ & ۴-۱ \\ ۳+۳ & ۶+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

۲ ماتریس واحد یا همانی عضو خنثی عمل ضرب است.

$$A \times I = I \times A = A$$

سؤال ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\right)B$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ ابتدا ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

چون ماتریس I عضو خنثی عمل ضرب است پس ماتریس $A\underbrace{\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\right)}_{I}B$ با ماتریس AB برابر است. بنابراین داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

گفته بودیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی نداره. اما در خاصیت ۲ دیدین که $I \times A$ با $A \times I$ برابره. به این ماتریس تعویض‌پذیر می‌گن.

ماتریس‌های تعویض‌پذیر: اگر A و B دو ماتریس باشند به‌طوری که $A \times B = B \times A$ باشد آن‌گاه به ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر می‌گویند.

سؤال نشان دهید ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۰ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند.

پاسخ برای آن‌که نشان دهیم A و B تعویض‌پذیرند، باید نشان دهیم $A \times B = B \times A$ است.

$$\begin{cases} A \times B = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۶ & ۱۰ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸+۳۰ & ۳۰+۱۰ \\ ۱۸+۶ & ۳۰+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۸ & ۴۰ \\ ۲۴ & ۳۲ \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۰ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸+۳۰ & ۳۰+۱۰ \\ ۱۸+۶ & ۳۰+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۸ & ۴۰ \\ ۲۴ & ۳۲ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B = B \times A \Rightarrow$$

A و B تعویض‌پذیرند.

! نکته ضرب ماتریس‌های همانی و اسکالر در هر ماتریس هم مرتبه با خودشان تعویض‌پذیر است.

$$A \times I = I \times A = A$$

$$kI \times A = A \times kI = kA$$

حواست هست که ماتریس اسکالر (که ماتریس همانی هم یه‌جورایی اسکالره) وقتی در ماتریس A ضرب میشه مانند عدد رفتار می‌کنه.

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA را به‌دست آورید.

پاسخ چون ماتریس B اسکالر است وقتی در ماتریس A ضرب می‌شود مانند این است که عدد ۳ را در ماتریس A ضرب کنیم. پس:

$$BA = ۳A = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ & -۳ \\ ۹ & ۰ & ۶ \\ ۳ & ۱۲ & ۹ \end{bmatrix}$$

نکته ضرب هر ماتریس قطری با هر ماتریس هم مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است و حاصل‌ضرب آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_2d & r_2e & r_2f \\ r_3g & r_3h & r_3i \end{bmatrix}$$

سؤال اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^2-j & i>j \\ 2i+j & i\le j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

حال چون ماتریس B قطری است، کافی است سطر اول A را دو برابر، سطر دوم آن را (-1) برابر و سطر سوم آن را ۳ برابر کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ -3 & -6 & -7 \\ 24 & 21 & 27 \end{bmatrix}$$

۳ ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع و تفریق ماتریس‌ها توزیع‌پذیر است.

$$A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B+C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A\times B+A\times C$ را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم $A\times B+A\times C$ برابر $A\times(B+C)$ است پس:

ذهنی انجام داری دیگه؟!

$$A\times B+A\times C=A\times(B+C)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+0-1 & 1+2+1 & -1+4-3 \\ 6+0+2 & 3+0-2 & -3+0+6 \\ 2+0+4 & 1-1-4 & -1-2+12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

۴ ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است یعنی جای پرانتزها در ضرب اهمیتی ندارد.

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

سؤال در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=0$ مقدار x را بیابید. **خرداد ۹۸**

پاسخ ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس سمت چپ را به دست آورده، سپس حاصل را در ماتریس $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 3x-6 & -6x+12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix} 3x-6 & -6x+12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=0\Rightarrow[-3x+6-6x+12]=0$$

$$\Rightarrow -9x+18=0\Rightarrow 9x=18\Rightarrow x=2$$

۵ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد. فقط سمت ضرب کردن در طرفین تساوی باید یکسان باشد یا از راست یا از چپ زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارند.

$B=C\Rightarrow A\times B=A\times C$ یا $B\times A=C\times A$

۶ قانون حذف در حالت کلی در تساوی‌های ماتریسی برقرار نیست.

$$AB=AC\not\Rightarrow B=C$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&۲\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۷&-۲\\-۱&۵\end{bmatrix}$ باشند، داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&۵\\۱۶&۱۰\end{bmatrix},\ AC=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&۷\\۵&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&۵\\۱۶&۱۰\end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید $AB=AC$ است در حالی‌که $B\neq C$ می‌باشد.

سؤال **درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.** دی ۹۹

اگر برای ماتریس‌های متمایز A ، B و C داشته باشیم $AB=AC$ ، آن‌گاه لزوماً $B=C$ است.

پاسخ نادرست؛ قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.

به توان رساندن ماتریس‌ها

اگر A ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه توان‌های صحیح و نامنفی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^{۰}=I\ ,\ A^{۱}=A\ ,\ A^{۲}=A\times A\ ,\ A^{۳}=A^{۲}\times A=A\times A^{۲},\dots,A^{n}=A\times A^{n-۱}=A^{n-۱}\times A=A^{۲}\times A^{n-۲}=\cdots$$

ویژگی‌ها

۱ ضرب توان‌های مختلف یک ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی است.

$$A^{n}\times A^{m}=A^{m}\times A^{n}=A^{m+n}$$

مثال $A^{۲}\times A^{۵}$ با $A^{۵}\times A^{۲}$ برابر است و مساوی $A^{۵+۲}=A^{۷}$ می‌باشد.

۲ اگر k یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$(kA)^{n}=k^{n}A^{n}$$

مثال $(۲A)^{۳}$ برابر $۲^{۳}\times A^{۳}=۸A^{۳}$ است.

۳ اگر یک ماتریس توان‌دار را دوباره به توان برسانیم، کافی است توان‌های جدید و قدیم را در هم ضرب کنیم.

$$(A^{m})^{n}=A^{mn}$$

مثال ماتریس $(A^{۲})^{۳}$ با ماتریس $A^{۶}$ برابر است.

۴ توان روی ماتریس همانی بی‌تأثیر است.

$$I^{n}=I$$

مثال $I^{۱۵۲}$ برابر I است.

سؤال **اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{۲}$ ، $A^{۳}$ و $A^{۷}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=I\times A=A$$

$$A^{۷}=A^{۳}\times A^{۳}\times A=(A^{۳})^{۲}\times A=I^{۲}\times A=I\times A=A$$

سؤال **اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۲\\-۱&۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۷}$ را به‌دست آورید.** دی ۹۸

پاسخ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۲\\-۱&۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰&۲\\-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&۰\\۰&-۲\end{bmatrix}=-۲I$$

حال با توجه به ویژگی‌های توان داریم:

$$A^{۷}=(A^{۲})^{۳}\times A=(-۲I)^{۳}\times A=-۸\times I^{۳}\times A=-۸\times I\times A=-۸A=\begin{bmatrix}۰&-۱۶\\۸&۰\end{bmatrix}$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & m+۷\\ n-۳ & ۲۷\end{bmatrix}$ باشند، مقادیر m و n را چنان بیابید که $A^۳-B=\bar{o}$ باشد.

پاسخ وقتی $A^۳-B=\bar{o}$ است یعنی $A^۳=B$ می‌باشد. پس باید ماتریس $A^۳$ را به‌دست آوریم، برای این منظور ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۴\\ ۰ & ۲۷\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$A^۳=B\Rightarrow\begin{bmatrix}-۱ & ۱۴\\ ۰ & ۲۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & m+۷\\ n-۳ & ۲۷\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}m+۷=۱۴\Rightarrow m=۷\\ n-۳=۰\Rightarrow n=۳\end{cases}$$

سؤال اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

۱ $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

۲ $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

پاسخ ۱ می‌دانیم $(A+B)^۲$ برابر $(A+B)\times(A+B)$ است، پس:

$$(A+B)^۲=(A+B)\times(A+B)=(A+B)\times A+(A+B)\times B$$

$$A\times A+\overset{\text{A و B هردو تعویض‌پذیرند.}}{\underbrace{B\times A}_{A\times B}}+A\times B+B\times B=A^۲+۲A\times B+B^۲$$

۲ با توجه به ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(A-B)\times(A+B)=(A-B)\times A+(A-B)\times B$$

$$A\times A-\overset{\text{A و B هردو تعویض‌پذیرند.}}{\underbrace{B\times A}_{A\times B}}+A\times B-B\times B=A^۲-B^۲$$

نکته چون ضرب ماتریس همانی و اسکالر با هر ماتریس هم‌مرتبه با خودشان تعویض‌پذیر هستند، پس می‌توان اتحادهای جبری توان ۲ را در مورد آن‌ها به‌کار برد.

سؤال اگر $A^۲=A$ و $(A+۲I)^۲=mA+nI$ باشند، مقادیر m و n را به‌دست آورید.

پاسخ چون ضرب A و ۲I تعویض‌پذیر هستند، پس داریم:

$$(A+۲I)^۲=A^۲+۲A(۲I)+(۲I)^۲=A^۲+۴A+۴I$$

$A^۲=A$ است داریم:

$$A^۲+۴A+۴I=A+۴A+۴I\Rightarrow(A+۲I)^۲=۵A+۴I$$

از مقایسهٔ $۵A+۴I$ با $mA+nI$، $m=۵$ و $n=۴$ است.

بسته ۳ پرسش‌های تشریحی

ضرب ماتریس‌ها

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید.

۴۱. اگر $A_{۲\times۳}$ و $B_{۵\times۲}$ باشند، آن‌گاه $A\times B$ انجام‌پذیر ....

۴۲. اگر $A_{۳\times۴}$، $B_{۵\times n}$ و $B\times A$ انجام‌پذیر باشد، مقدار n برابر .... است.

۴۳. اگر $A_{۲\times۵}$ و $B_{۵\times۳}$ باشند، ماتریس $A\times B$ از مرتبهٔ .... است.

۴۴. اگر $A_{۳\times۴}$ و $B_{۴\times۳}$ باشند، ماتریس $B\times A$ دارای .... درایه است.

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشند، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A\times B$ برابر .... است.

۴۶. ماتریس .... عضو خنثی عمل ضرب است.

۴۷. ضرب ماتریس اسکالر با ماتریس هم‌مرتبه با خودش خاصیت جابه‌جایی ....

۴۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A^۲$ برابر .... است.

● **درستی یا نادرستی عبارات زیر را در سؤالات ۴۹ تا ۶۰ مشخص کنید.**

۴۹ . اگر $A_{۳\times۶}$ و $B_{۶\times۲}$ باشند، ماتریس AB دارای ۳۶ درایه است.

۵۰ . اگر $A\times B$ انجام‌پذیر باشد، حتماً $B\times A$ نیز انجام‌پذیر است.

۵۱ . اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A\times B$ یک ماتریس قطری است.

۵۲ . اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & ۱۰\\ ۲ & ۶\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B\times A$ یک ماتریس اسکالر است.

۵۳ . اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۲\\ ۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم $A^{۳}$ برابر ۵ است. (دی ۹۷)

۵۴ . اگر $A\times B=\bar{o}$ باشد، حداقل یکی از ماتریس‌های A و B ماتریس صفر است.

۵۵ . اگر $B=C$ باشد آن‌گاه $A\times B=A\times C$ است.

۵۶ . اگر $A\times C=A\times D$ باشد، آنگاه ماتریس $C-D$ ماتریس صفر است.

۵۷ . فقط می‌توان ماتریس‌های مربعی را به توان رساند.

۵۸ . اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A^{۲}$ برابر ۱۸ است.

۵۹ . اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند، آن‌گاه عبارت $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ همواره برقرار است. (شهریور ۱۴۰۰)

۶۰ . اگر $A^{۲}=A$ باشد، در این صورت داریم: $(A+I)^{۲}=I+۳A$ (دی ۹۷)

۶۱ . اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۱\\ -۲ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A\times B$ و $B\times A$ را با درایه‌هایشان به‌دست آورید.

۶۲ . دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروضند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

۶۳ . اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}$ باشند، $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

۶۴ . اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۱ & -۴\\ ۲ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۲ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $BA^{۲}$ را محاسبه کنید.

۶۵ . اگر ماتریس ناصفر $B=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۴ & m\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴a\\ ۴b\end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار m را به‌دست آورید.

۶۶ . اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۶۷ . ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & ۴\\ ۳ & b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس $A\times B$ قطری باشد، ماتریس $A^{۳}$ را با درایه‌هایش محاسبه کنید.

۶۸ . اگر $A=\begin{bmatrix}x & -۱ & ۴\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۱ & ۰\\ y & ۱\end{bmatrix}$ باشند، مقادیر x و y را به‌گونه‌ای تعیین کنید که $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد.

۶۹ . اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به‌صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$b_{ij}=\begin{cases}i^{۲}+۱ & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+۲ & i<j\end{cases}\qquad a_{ij}=\begin{cases}i^{۲}-۱ & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}$$

۷۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۷۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۷۲. اگر $\begin{bmatrix}x&2x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$ باشد، مقادیر x را به‌دست آورید.

۷۳. اگر $\begin{bmatrix}-1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\x&-1&0\\1&2&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\3\\1\end{bmatrix}=0$ باشد، مقادیر x را به‌دست آورید.

۷۴. اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix}x&2&-y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-x\end{bmatrix}$ را بیابید. (دی ۹۷)

۷۵. اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases}ij & i\ge j\\ i-j & i<j\end{cases}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 3}$ که $b_{ij}=\begin{cases}2 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$ باشند، ماتریس AB را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۷۶. اگر $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&2&5\\2&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&2\\2&1&-1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۷۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-1&5\\4&2&1\end{bmatrix}$ و $B+C=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&4\\2&1&5\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $2B\times A+2C\times A$ را به‌دست آورید.

۷۸. اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^2-A را به‌دست آورید.

۷۹. ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\ne j\end{cases}$ تعریف شده است. ماتریس A^2-4A را به‌دست آورید.

۸۰. اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^3 را به‌دست آورید.

۸۱. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 را به‌دست آورید.

۸۲. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a+b&2&2\\2&2&-1\\2&-1&4a+b\end{bmatrix}$ را درنظربگیرید. مقادیر a و b را چنان بیابیدکه داشته باشیم $A^2-B=\bar{O}$.
($\bar{O}$ ماتریس صفراست) (دی ۹۸)

۸۳. اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$ و $B=[ij]$ باشند، ماتریس $(A+B)^2-B$ را به‌دست آورید.

۸۴. اگر A و B ماتریس‌های مربعی و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ است.

۸۵. اگر $A^2=2A$ و $(A-3I)^2=mA+nI$ باشند، مقادیر m و n را به‌دست آورید.

۸۶. اگر $A=\begin{bmatrix}0&4\\2&1\end{bmatrix}$ باشد. مقادیر m و n را طوری بیابیدکه رابطهٔ $A^2=mA+nI_2$ برقرار باشد. (I_2 ماتریس همانی است.) (شهریور ۹۹)

فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱ | درایه

---

۲ | $5\times3=15$

---

۳ | در درایهٔ سطر دوم و ستون چهارم $i=2$ و $j=4$ است پس:

$$a_{ij}=i^2j-3\Rightarrow a_{24}=2^2\times4-3=13$$

---

۴ | در درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $i=2$ و $j=3$ است پس:

$$a_{ij}=\frac{i+j}{2j}\Rightarrow a_{23}=\frac{2+3}{2\times3}=\frac{5}{6}$$

---

۵ | در درایهٔ سطر اول و ستون دوم، $i=1$ و $j=2$ است. چون $i<j$ می‌باشد، از قانون j^2-1 استفاده می‌کنیم: $a_{12}=2^2-1=3$

---

۶ | نادرست.

در معرفی مرتبهٔ ماتریس در سمت چپ تعداد سطرها و در سمت راست تعداد ستون‌ها را اعلام می‌کنیم، بنابراین مرتبهٔ ماتریس 5×3 است.

---

۷ | نادرست.

اگر تعداد ستون‌ها را m فرض کنیم، باید $5\times m$ برابر ۱۲ شود. در این‌صورت مقدار طبیعی برای m به‌دست نمی‌آید. (*حواست هست که تعداد ستون‌ها باید یه عدد طبیعی باشه*)

---

۸ | درست.

ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2+1^2 & 1^2+2^2\\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر $2+5+5+8=20$ است.

---

۹ | درایه‌های ستون دوم A همان a_{12}، a_{22} و a_{32} هستند، پس:

$$i<j\Rightarrow a_{ij}=i-\frac{j}{2}\Rightarrow a_{12}=1-\frac{2}{2}=1-1=0$$

$$i=j\Rightarrow a_{ij}=i^2-j^i\Rightarrow a_{22}=2^2-2^2=4-4=0$$

$$i>j=a_{ij}=i^2-j^i\Rightarrow a_{32}=3^2-2^3=9-8=1$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $0+0+1=1$ است.

---

۱۰ | با توجه به ضابطهٔ a_{ij} داریم: $i=j\Rightarrow a_{ij}=2\Rightarrow a_{33}=2$

$$i>j=a_{ij}=i+j\Rightarrow a_{31}=3+1=4$$

$$i<j\Rightarrow a_{ij}=i-j\Rightarrow a_{12}=1-2=-1$$

---

۱۱ | با توجه به ضابطهٔ a_{ij} داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1^2 & 1^3 & 1^4\\ 2 & -3 & 2^3 & 2^4\\ 2 & 2 & -3 & 3^4\\ 2 & 2 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 8 & 16\\ 2 & 2 & -3 & 81\\ 2 & 2 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

---

۱۲ | ۹

درایه‌های قطر اصلی ۱ و ۸ هستند پس $1+8=9$ می‌باشد.

---

۱۳ | سطری

---

۱۴ | برابر

---

۱۵ | هم‌مرتبه

---

۱۶ | دارد.

---

۱۷ | ۳

در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases}n+2=4\Rightarrow n=2\\ m-1=0\Rightarrow m=1\end{cases}\Rightarrow m+n=1+2=3$$

---

۱۸ | صفر

---

۱۹ | ۱۴

ماتریس $A+2B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+2B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ -4 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -5 & 10\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=5+4+(-5)+10=14$$

---

۲۰ | نادرست

در ماتریس صفر تمام درایه‌ها صفر است اما مرتبهٔ ماتریس می‌تواند هر چیزی باشد.

---

۲۱ | نادرست

درایه‌های واقع بر قطر اصلی این‌گونه‌اند.

---

۲۲ | نادرست

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری نیز می‌توانند صفر باشند مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است.

---

۲۳ | درست

ماتریس‌های اسکالر نوعی از ماتریس‌های مربعی هستند.

---

۲۴ | نادرست

هر ماتریس قطری لزوماً اسکالر نیست مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ قطری است اما اسکالر نیست.

۲۵ | درست

---

۲۶ | نادرست

طرفین تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد غیرصفر تقسیم کرد.

---

۲۷ | نادرست

ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع است.

---

۲۸ | درست

همواره داریم: $A+(B+C)=(A+B)+C$

---

۲۹ | می‌دانیم ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ n در n هستند، پس:

$n \times n = 9 \Rightarrow n = 3$

بنابراین با توجه به ضابطه‌های a_{ij} و این‌که مرتبهٔ ماتریس ۳ است داریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 2(2)+1 & 2-2 & 3-2 \\ 2(3)+1 & 2(3)+2 & 3-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

---

۳۰ | درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1^2-m\times 1 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & 2^2-m\times 2 & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & 3^2-m\times 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-m & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & 4-2m & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & 9-3m \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$1-m+4-2m+9-3m=8 \Rightarrow 14-6m=8 \Rightarrow$

$6m=6 \Rightarrow m=1$

---

۳۱ | چون A ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} m-4=0 \Rightarrow m=4 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

حال چون ماتریس B اسکالر است پس:

$$\begin{cases} m-k=3 \xRightarrow{m=4} 4-k=3 \Rightarrow k=1 \\ n=3 \end{cases}$$

بنابراین $m+n+k$ برابر $8=1+3+4$ است.

---

۳۲ | در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی برابر هستند. پس

$$\begin{cases} 3a=-6 \Rightarrow a=-2 \\ c-1=0 \Rightarrow c=1 \\ a+b=0 \xrightarrow{a=-2} -2+b=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

بنابراین $a(b+c)$ برابر $-6=-2\times(2+1)$ است.

---

۳۳ | در ماتریس واحد یا همانی درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} a-2=1 \Rightarrow a=3 \\ c-b=0 \cdots \xrightarrow{b=-1} c+1=0 \Rightarrow c=-1 \\ d+a=0 \cdots \xrightarrow{a=3} d+3=0 \Rightarrow d=-3 \\ b+2=1 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $a+b+c+d$ برابر $-2=(-3)+(-1)+(-1)+3$ می‌باشد.

---

۳۴ | در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است. پس:

$$\begin{cases} x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=2 \\ x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-1 \end{cases}$$

واضح است که فقط $x=-1$ می‌تواند هم‌زمان هر دو درایه را صفر کند. پس ماتریس A به‌صورت زیر است:

$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=-1$

---

۳۵ | ماتریس‌های A و B که هم‌مرتبه هستند. پس فقط باید درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها مساوی باشند:

$$\begin{cases} 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+y=5 \xrightarrow{2x=3} y=2 \Rightarrow x+2y+3z=\frac{3}{2}+2(2)+3(-2)=-\frac{1}{2} \\ z=-2 \end{cases}$$

---

۳۶ | چون دو ماتریس A و B مساوی‌اند پس حتماً ماتریس A از مرتبهٔ ۲ است. حال ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 3(1)-1^2 & 3(1)-2^2 \\ 3(2)-1^2 & 3(2)-2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} b-2=2 \Rightarrow b=4 \\ a+1=-1 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow a+b+c=(-2)+4+4=6 \\ c+1=5 \Rightarrow c=4 \end{cases}$$

---

۳۷ |

$$2A-3B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -14 \end{bmatrix}$$

---

۳۸ | چون $A+C=\bar{O}$ است پس ماتریس C قرینهٔ ماتریس A می‌باشد:

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $2B+3C$ را به‌دست می‌آوریم:

$$2B+3C=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ -2 & 10 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 0 & -12 & -3 \\ -6 & 3 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -8 & 5 \\ -8 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

۳۹ | چون جمع ماتریس‌ها را داریم، پس ماتریس‌ها باید هم‌مرتبه باشند لذا $A_{3\times3}$ است. اکنون ماتریس A را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}(1)^2-1 & 2(1)-2 & 2(1)-3\\ 2^2-1 & (2)^2-2 & 2(2)-3\\ 3^2-1 & 3^2-2 & (3)^2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\3&2&1\\8&7&6\end{bmatrix}$$

چون $2A-3B+2I$ را می‌خواهیم باید I ماتریس واحد مرتبهٔ ۳ باشد، پس:

$$2\begin{bmatrix}0&0&-1\\3&2&1\\8&7&6\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&0&2\\5&-1&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-2\\6&4&2\\16&14&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-3&9\\12&0&6\\15&-3&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3&-11\\-6&6&-4\\1&17&5\end{bmatrix}$$

۴۰ | $(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]$

$=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$

۴۱ | نیست. $A_{2\times3}\times A_{5\times2}\Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست.

برابر نیستند

۴۲ | ۳

$B_{5\times n}\times A_{3\times4}$

$n=3$

۴۳ | ۲×۳

$A_{2\times5}\times B_{5\times3}=(AB)_{2\times3}$

برابر

مرتبه

۴۴ | ۱۶

$B_{4\times3}\times A_{3\times4}=(BA)_{4\times4}\Rightarrow 4\times4=16$

برابر

مرتبه

۴۵ | ۵

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5\\2&1\end{bmatrix}$$

۴۶ | واحد (همانی)

۴۷ | دارد

۴۸ | ۸

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}$$

۴۹ | نادرست

$A_{3\times6}\times B_{6\times2}=AB_{3\times2}$ دارای $6=2\times3$ درایه است.

برابر

مرتبه

۵۰ | نادرست

مثلاً اگر A از مرتبهٔ 2×3 و B از مرتبهٔ 3×4 باشد، AB انجام‌پذیر است ولی BA انجام‌پذیر نیست.

۵۱ | درست

$$A\times B=\begin{bmatrix}4&4\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&0\\0&-8\end{bmatrix}\Rightarrow$$ قطری است.

۵۲ | درست

$$B\times A=\begin{bmatrix}4&10\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\Rightarrow$$ اسکالر است.

۵۳ | نادرست

ابتدا سطر دوم A^2 را به‌دست می‌آوریم، کافی است سطر دوم ماتریس A را در کل ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^2\ \text{سطر دوم ماتریس}=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&0&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&1&-4\end{bmatrix}$$

حال سطر دوم A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^3\ \text{سطر سوم ماتریس}=\begin{bmatrix}-1&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&0&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8&-6&-7\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر دوم A^3 برابر $-8+(-6)+(-7)=-21$ است.

۵۴ | نادرست

مثلاً ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2&4\\4&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&12\\-2&-6\end{bmatrix}$ صفر نیستند. امّا حاصل‌ضرب آن‌ها ماتریس صفر است. نگاه کنید:

$$AB=\begin{bmatrix}2&4\\4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&12\\-2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

۵۵ | درست

۵۶ | نادرست

وقتی $C-D$ ماتریس صفر است یعنی $C=D$ می‌باشد. امّا قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست که بتوان از تساوی $A\times C=A\times D$ نتیجه گرفت که $C=D$ است.

۵۷ | درست

۵۸ | نادرست

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-18\\6&13\end{bmatrix}$$

۵۹ | نادرست

اگر A و B تعویض‌پذیر باشند، عبارت برقرار است.

۶۰ درست

چون A و I تعویض‌پذیر هستند، پس:

$$(A+I)^2 = A^2 + 2A + I \xrightarrow{A^2=A} (A+I)^2 = A + 2A + I$$
$$\Rightarrow (A+I)^2 = 3A + I$$

۶۱

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 13 \\ 4 & 3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

---

۶۲ چون ماتریس A قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر می‌باشند.

$$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

حال به‌ازای $m=2$ و $n=-1$ ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

ماتریس A قطریه و فقط کافیه سطر اول Bرو ۲ برابر، سطر دوم و سوم اونو ۳ برابر کنی.

---

۶۳ A یک ماتریس ۳ × ۲ و B یک ماتریس ۳ × ۳ است پس A × B انجام‌پذیر است امّا B × A انجام‌پذیر نیست. پس

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

۶۴ ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس BA^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$BA^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & -14 \\ 11 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$

۶۵

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a \\ 4b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5a-2b \\ 4a+mb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a \\ 4b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a-2b=4a \Rightarrow a=2b \\ 4a+mb=4b \xrightarrow{a=2b} 4(2b)+mb=4b \Rightarrow 8b+mb=4b \\ \Rightarrow mb=-4b \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

توجه کنید که $b \neq 0$ است، اگر $b=0$ باشد آن‌گاه $a=0$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ماتریس صفر می‌شود که با فرض مسأله در تناقض است.

---

۶۶ چون A × B ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر است. بنابراین کافی است درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را به‌دست آورده و برابر صفر قرار دهیم.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -4+2a \\ 2b-2 & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4+2a=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2 \\ 2b-2=0 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

---

۶۷ ابتدا با توجه به این‌که A × B قطری است مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} a & 4 \\ 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -2a+8 \\ 3+3b & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+8=0 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \\ 3+3b=0 \Rightarrow 3b=-3 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

حال ماتریس A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 148 & 100 \\ 75 & 23 \end{bmatrix}$$

---

۶۸ ماتریس A × B از مرتبهٔ ۲ × ۲ می‌باشد. با توجه به این‌که A × B قطری است، داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -2x+4 \\ y+7 & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \\ y+7=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

---

۶۹ ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایشان معلوم می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 2-1 & 3-1 \\ 2-1 & 2^2-1 & 3-2 \\ 3-1 & 3-2 & 3^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2+1 & 1-2+2 & 1-3+2 \\ 2+1 & 2^2+1 & 2-3+2 \\ 3+1 & 3+2 & 3^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

حال A × B و B × A را به‌دست می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 15 & 21 \\ 15 & 21 & 13 \\ 39 & 47 & 81 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 7 & 19 & 19 \\ 25 & 29 & 93 \end{bmatrix}$$

۷۰

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}13&17&7\\3&2&5\\3&7&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&20&-6\\2&8&2\\7&1&-5\end{bmatrix}$$

۷۱

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&6&3\\8&7&4\\2&3&5\end{bmatrix}$$

۷۲

$$\begin{bmatrix}x&2x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11x-1&-x-2&-3x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11x-1&-x-2&-3x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 11x^2-x-2x^2-4x+3x=0\Rightarrow 9x^2-2x=0$$

$$\Rightarrow x(9x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\9x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

۷۳

$$\begin{bmatrix}-1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\x&-1&0\\1&2&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-1&0&2x-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3x-1&0&2x-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\3\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow 3x^2-x+0+2x-2=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+x-2\xrightarrow{a+c=b}x=-1,\ x=\frac{2}{3}$$

۷۴ چون ضرب ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر است پس $AB=BA$ می‌باشد:

$$AB=\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+3y&3x+4y\\5&2\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+6&4y-3\\3x+8&3y-4\end{bmatrix}$$

$$AB=BA\Rightarrow\begin{cases}3x+8=5\Rightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1\\3y-4=2\Rightarrow 3y=6\Rightarrow y=2\end{cases}$$

حال حاصل $\begin{bmatrix}x&2&-y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-x\end{bmatrix}$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix}-1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=[-3+4-2]=[-1]=-1$$

۷۵

$$A=\begin{bmatrix}1&1-2&1-3\\2&4&2-3\\3&6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\2&4&-1\\3&6&9\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\2&4&-1\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\4&8&-2\\6&12&18\end{bmatrix}$$

۷۶

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&2&5\\2&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&-2\\-3&6&15\\-2&-1&-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&4&-2\\-3&6&15\\-2&-1&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&2\\2&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-2&12\\21&15&-6\\-9&-4&0\end{bmatrix}$$

۷۷ با توجه به ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$2B\times A+2C\times A=2(B\times A+C\times A)=2(B+C)\times A$$

$$2\times\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&4\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-1&5\\4&2&1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}11&5&2\\23&5&16\\25&7&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&10&4\\46&10&32\\50&14&28\end{bmatrix}$$

۷۸

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&5\\25&14\end{bmatrix}$$

$$A^2-A=\begin{bmatrix}9&5\\25&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&4\\20&11\end{bmatrix}$$

۷۹

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

$$A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

۸۰

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30&6&86\\-2&-2&-36\\14&4&42\end{bmatrix}$$

۸۱

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}=\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

---

۸۲ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۵\end{bmatrix}$$

از $A^{۲}-B=\bar{0}$ نتیجه می‌گیریم که $A^{۲}=B$ است، پس:

$$\begin{bmatrix}۵ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۴a+b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=۵\\ ۴a+b=۵\end{cases}\Rightarrow a=۰, b=۵$$

---

۸۳ چون A، ۲×۲ است به دلیل $A+B$ ماتریس B نیز ۲×۲ می‌باشد.

پس:

$$B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۷\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۳۶\\ ۹ & ۵۳\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^{۲}-B=\begin{bmatrix}۸ & ۳۶\\ ۹ & ۵۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۳۴\\ ۷ & ۴۹\end{bmatrix}$$

---

۸۴ چون A و B تعویض‌پذیر هستند پس $AB=BA$ می‌باشد.

بنابراین:

$$(A-B)^{۲}=(A-B)\times(A-B)=A^{۲}-A\times B-\underbrace{B\times A}_{AB}+B^{۲}$$

$$=A^{۲}-۲AB-B^{۲}$$

---

۸۵ چون ماتریس اسکالر $۳I$ باماتریس هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است داریم:

$$(A-۳I)^{۲}=A^{۲}-۶A+۹I\xrightarrow{A^{۲}=۲A}(A-۳I)^{۲}=۲A-۶A+۹I$$

$$=-۴A+۹I$$

از مقایسهٔ $-۴A+۹I$ با $mA+nI$ داریم: $m=-۴, n=۹$

---

۸۶ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴m\\ ۲m & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & ۰\\ ۰ & n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & ۴m\\ ۲m & m+n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}n=۸\\ ۴m=۴\Rightarrow m=۱\end{cases}$$

---

۸۷ ۵

$$|A|=۲\times۴-۱\times۳=۸-۳=۵$$

---

۸۸ ۸-

دترمینان ماتریس قطری برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

---

۸۹ ۷-

$$|A|=[۲]\Rightarrow|A|=۲$$

$$B=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=۳\times۱-۴\times۲=-۵$$

$$\Rightarrow|B|-|A|=-۵-۲=-۷$$

---

۹۰ ۲۴۰

$$A+B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|A+B|=۳\times۸-۲\times۰=۲۴-۰=۲۴$$

---

۹۱ ۸

نسبت به سطر اول بسط می دهیم:

$$|A|=۱\times(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & -۳\end{vmatrix}+۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}$$

$$=۲+۲(۳)=۲+۶=۸$$

---

۹۲ ۸

چون ماتریس $\begin{bmatrix}۲ & ۰ & f\\ ۰ & a & ۰\\ ۰ & ۰ & b\end{bmatrix}$ اسکالر است پس به‌صورت $\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ می‌باشد و دترمینان آن برابر $۸=۲\times۲\times۲$ است.

---

۹۳ ۹۶۰

ابتدا دترمینان A را نسبت به سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$|A|=۲\times(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}=۲(۶)=۱۲$$

حال داریم:

$$|۲A|=۲^{۳}\times|A|=۸\times۱۲=۹۶$$

---

۹۴ ۵-

ابتدا دترمینان A را نسبت به ستون سوم بسط می‌دهیم:

$$|A|=(-۱)\times(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}=-۱\times(-۵)=۵$$

حال داریم:

$$|-A|=(-۱)^{۳}\times۵=-۵$$

---

۹۵ $\frac{۱}{۲}$

$$\left|\frac{۱}{۲}A\right|=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\times|A|=\frac{۱}{۸}\times۴=\frac{۱}{۲}$$

---

۹۶ ۱۶

$$||A|A|=|۲A|=۲^{۳}\times|A|=۸\times۲=۱۶$$